MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Ion D. Ion

Gabriela Streinu-Cercel

Adrian P. Ghioca

Neculai I. Nediță

Eugen Câmpu

Nicolae Angelescu

Boris Singer

Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M2

Filiera teoretică

Profil real

Specializare: științe ale naturii

Filiera tehnologică

Toate calificările profesionale

SIGMA

Cuprins

I. Elemente de algebră

Grupuri 5
Legi de compoziție 5
Proprietăți ale legilor de compoziție 8
Clase de resturi modulo n 14
Grupuri 21
Grupuri de permutări 27
Morfisme de grupuri 31
Teste de evaluare 35
Probleme de tip bacalaureat 35

Inele și corpuri 38
Inele 38
Reguli de calcul într-un inel 43
Corpuri 49
Teste de evaluare 51
Probleme de tip bacalaureat 51

Polinoame 52
Polinoame având coeficienți într-un corp comutativ 52
Împărțirea cu rest a polinoamelor 60
Calculul valorilor unui polinom. Schema lui Horner 65
Relația de divizibilitate pentru polinoame 71
Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viète 82
Ecuații algebrice având coeficienți numerici (în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 94
Teste de evaluare 100
Probleme de tip bacalaureat 100

II. Elemente de analiză matematică

Primitive 103
Probleme care conduc la noțiunea de integrală 103
Primitive și integrala nedefinită a unei funcții. Primitive uzuale 108
Teste de evaluare 116
Probleme de tip bacalaureat 117

Integrala definită 118
Integrale definite 118
Metode de calcul al integralelor definite.Integrarea funcțiilor raționale 126
Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea prin părți și schimbarea de variabilă 131
Teste de evaluare 138
Probleme de tip bacalaureat 139

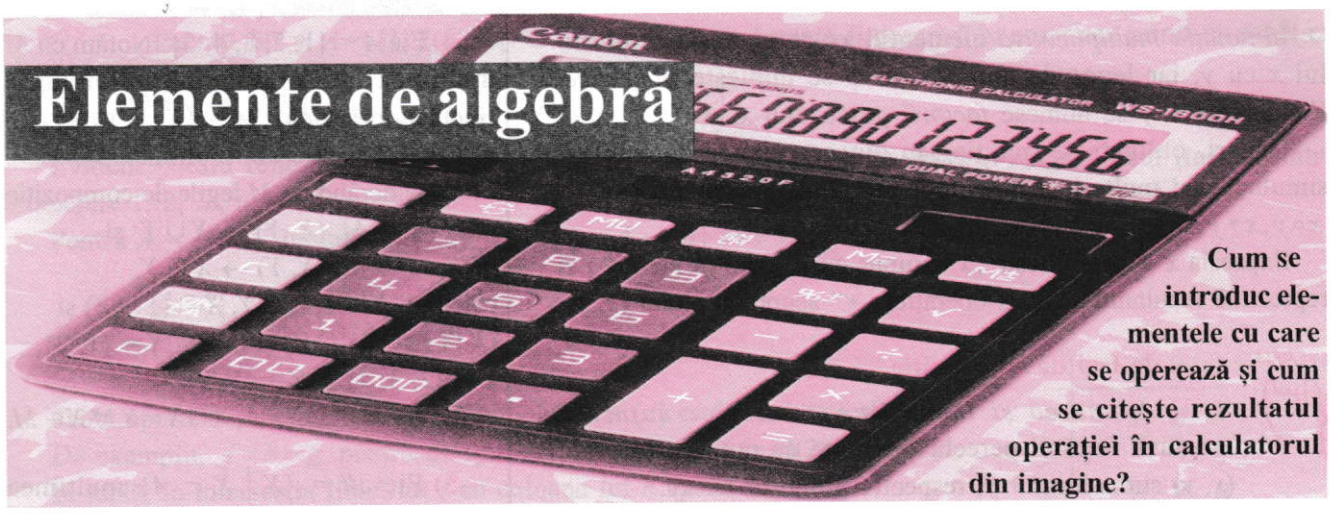
Aplicații ale integralei definite 141
Aria unei suprafețe plane 141
Volumul unui corp de rotație 145
Teste de evaluare 148
Probleme de tip bacalaureat 148

Probleme recapitulative 151

Teme de sinteză pentru pregătirea examenului de bacalaureat 163

Indicații și răspunsuri 178

Elemente de algebră



Cum se introduc elementele cu care se operează și cum se citește rezultatul operației în calculatorul din imagine?

Grupuri

Legi de compoziție

Pasul decisiv care a marcat trecerea de la aritmetică la algebră a fost înlocuirea operațiilor cu numere, prin operații cu litere (simboluri) reprezentând numere. Ulterior, o treaptă superioară de abstractizare s-a realizat prin folosirea unor simboluri care reprezentau și alte obiecte matematice: mulțimi, funcții, matrice, polinoame...

Definiția unei legi de compoziție

O operație algebrică (binară) pe o mulțime nevidă M combină componentele oricărui cuplu (x, y) de elemente din M și are ca rezultat un element tot din M, notat, de exemplu, cu $x * y$.

Un model pentru acțiunea unei operații este cutia neagră (black box) cu două intrări și o singură ieșire. La cele două intrări pot fi introduse, într-o ordine precizată, două elemente arbitrare $x, y \in M$ și, de fiecare dată, la ieșire se obține un element $x * y \in M$, unic determinat de cuplul (x, y). Se realizează astfel o *corespondență funcțională* $\varphi : M \times M \to M$, prin care la orice pereche ordonată $(x, y) \in M \times M$ se asociază un element unic determinat $\varphi(x, y) \in M$, notat eventual $x * y$.



Definiție. Fie M o mulțime nevidă. O funcție
$$\varphi : M \times M \to M,\ (x, y) \mapsto \varphi(x, y),$$
se numește *lege de compoziție* (*internă*) sau *operație algebrică binară* pe *mulțimea* M. Elementul $\varphi(x, y) \in M$ se numește *compusul lui* x *cu* y *prin* φ (în această ordine!).

M se numește *mulțimea suport* a operației φ.

Mulțimea M înzestrată cu operația φ se notează (M, φ).

În locul notației funcționale incomode $\varphi(x, y)$, de obicei se folosește fie notația aditivă $x + y$, fie notația multiplicativă $x \cdot y$ sau xy.

În *notația aditivă*, elementul $x + y$ se numește *suma* lui x cu y, iar legea de compoziție se numește *adunare*. Elementele x, y se numesc *termenii* sumei $x + y$.

Cum acționează o operație?

1) Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $a \vee b$ c.m.m.d.c. al lui a și b. Pe $\mathbb{N}^*$ definim operația $(a, b) \to a \vee b$.

a) Calculați $18 \vee 12$, $(18 \vee 12) \vee 15$ și $18 \vee (12 \vee 15)$.

b) Arătați că $1 \vee a = 1$ și $a \vee a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$.

2) Fie $M = \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in M$, notăm cu $a \wedge b$ c.m.m.m.c. al lui a și b. Pe M se obține legea de compoziție (internă) $M \times M \to M$, $(a, b) \to a \wedge b$.

a) Calculați $18 \wedge 12$, $(18 \wedge 12) \wedge 15$, $18 \wedge (12 \wedge 15)$.

b) Arătați că $1 \wedge a = a$ și $a \wedge a = a$, $\forall a \in M$.

c) Verificați că
$(18 \vee 12) \cdot (18 \wedge 12) = 18 \cdot 12$.

3) Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ definim
$$a * b = \frac{a + b + |a - b|}{2},\quad a \circ b = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

a) Calculați $4 \circ 5$; $5 \circ 4$; $3 * 4$; $4 * 3$.

b) Arătați că $a * b = \max\{a, b\}$ și $a \circ b = \min\{a, b\}$.

c) Arătați că $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.

În *notația multiplicativă* elementul xy se numește *produsul* lui x cu y, iar legea de compoziție φ se numește *înmulțire*. Elementele x, y se numesc *factorii* produsului xy.

Uneori, obligați de tradiție sau din necesitatea de a folosi simultan mai multe legi de compoziție, utilizăm notații ca: $x \circ y, x * y, x \wedge y, x \vee y, x \perp y, x \top y, x \oplus y$ etc.

Expresia $x * y$ se citește „x compus cu y" (sau „x stea y") și reprezintă rezultatul acțiunii operației „$*$" asupra cuplului (x, y).

EXEMPLE

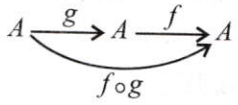
... de legi de compoziție.

1) *Adunarea și înmulțirea numerelor naturale* asociază fiecărei perechi ordonate de numere naturale (x, y) suma lor $x + y$, respectiv produsul lor xy.

2) *Adunarea și înmulțirea matricelor pătratice* de ordin n asociază fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suma $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, respectiv produsul $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) *Compunerea funcțiilor*

Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f: A \to A, f \text{ funcție}\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(A)$, funcția $f \circ g : A \to A$, definită prin $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, se numește *compusa lui f cu g* (în această ordine).



Fie $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente. Acțiunea unei legi de compoziție φ pe M poate fi descrisă prin *tabla Cayley* a operației φ. Când n este suficient de mic, tabla operației constituie un instrument eficace de studiu.

Cayley Arthur (1821-1895), matematician englez, profesor la Cambridge, cercetător în domeniul teoriei matricelor și determinanților; a introdus calculul simbolic, teoria grupurilor, ecuații diferențiale, astronomia sferică ....

Tabla operației φ (*tabla lui Cayley*) pe mulțimea M este un tabel cu linii și coloane corespunzătoare elementelor mulțimii M. La intersecția liniei a_i cu coloana a_j din *tabla lui Cayley* se află compusul lui a_i cu a_j prin operația φ.

φ	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1				$\vdots$		
a_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
a_i	$\cdots\cdots$			$\varphi(a_i, a_j)$		
$\vdots$						
a_n						

În notație multiplicativă avem:

$\cdot$	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_1a_1	$\cdots$	a_1a_j	$\cdots$	a_1a_n
$\vdots$					
a_i	a_ia_1	$\cdots$	a_ia_j	$\cdots$	a_ia_n
$\vdots$					
a_n	a_na_1	$\cdots$	a_na_j	$\cdots$	a_na_n

4) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Notăm cu M mulțimea tuturor submulțimilor lui A (inclusiv cea vidă), $M = \{X \mid X \subseteq A\}$.
a) Câte elemente are mulțimea M?
b) Considerând pe M legile de compoziție $M \times M \to M$, $(X, Y) \to X \cup Y$ și $M \times M \to M$, $(X, Y) \to X \cap Y$, calculați $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \cap (Y \cup Z)$ și $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ știind că $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$ și $Z = \{5, 3\}$.
c) Arătați că $\varnothing \cup X = X$, $A \cap X = X$, $\forall X \in M$.

5) Fie $\mathcal{M} = \{X \mid X \subset A\}$ mulțimea submulțimilor lui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dacă $X, Y \in M$, fie $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ (*diferența simetrică* a lui X și Y). Considerăm pe M legea de compoziție $M \times M \to M$, $(X, Y) \to X \Delta Y$
a) Calculați $X \Delta Y$ și $X \Delta X$, dacă $X = \{1, 2, 3, 5\}$ și $Y = \{2, 3, 4\}$.
b) Pentru mulțimile X și Y definite la punctul a) calculați $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.
c) Demonstrați că $\forall X \in M$, $\varnothing \Delta X = X$ și $X \Delta X = \varnothing$.
d) Arătați că $\forall X, Y \in M$. $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

6) Construiți tabla legii de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, unde $M = \{a, b, c\}$, $\varphi((a, a)) = a$; $\varphi((a, b)) = b$, $\varphi((a, c)) = c$; $\varphi((b, a)) = b$; $\varphi((b, b)) = c$; $\varphi((b, c)) = a$; $\varphi((c, a)) = c$; $\varphi((c, b)) = a$; $\varphi((c, c)) = b$.

7) Construiți tabla legii de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(x, y) = |x - y|$, unde $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

8) Fie $M = \{\varnothing, X, Z, Y\}$ mulțimea părților lui $A = \{1, 2\}$, unde $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$, $Z = \{1, 2\}$.
Completați tablele legilor de compoziție „$\cup$", „$\cap$" și „Δ" (reuniunea, intersecția și diferența simetrică).

EXEMPLU

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție $f : A \to A$ poate fi descrisă în acest caz printr-un tabel cu două linii: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(i) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$.

Evident, f este funcție bijectivă dacă și numai dacă în a doua linie apare o singură dată fiecare dintre numerele 1, 2, ..., n.

Pentru $A = \{1, 2\}$, mulțimea $\mathcal{F}(A) = \{ \varphi \mid \varphi : A \to A\}$ este formată din elementele:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tabla operației de compunere a funcțiilor din $\mathcal{F}(A)$ este prezentată alăturat.
De exemplu, $f \circ h = g$ pentru că $(f \circ h)(1) = 1 = g(1)$ și $(f \circ h)(2) = 1 = g(2)$.
În tablă, la intersecția liniei lui f cu coloana lui h apare funcția g.

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

PROBLEME PROPUSE

● **1.** Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(x, y) = |x - y|$.
Alcătuiți tabla operației φ.

● **2.** Pe $\mathbb{N}$ se definesc legile „$\vee$" și „$\wedge$" prin $a \vee b = \text{c.m.m.d.c.}\{a, b\}$ și $a \wedge b = \text{c.m.m.m.c.}\{a, b\}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$. Fie $H = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divide } 12\}$.
Alcătuiți tablele operațiilor „$\vee$" și „$\wedge$" pe H.

● **3.** Fie $A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f : A \to A\}$ și $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(A)$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}$, $f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Alcătuiți tabla operației de compunere a funcțiilor pe $H = \{f_1, f_2, f_3\}$.

●● **4.** Fie mulțimea cu trei elemente $M = \{a, b, c\}$. Câte legi de compoziție se pot defini pe M ?

●●● **5.** Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f : A \to A\}$. Stabiliți care sunt elementele mulțimii $H = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f \text{ bijectivă}\}$ și alcătuiți tabla operației de compunere a funcțiilor.

● **6.** Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție „$*$" prin $x * y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in M$.
Alcătuiți tabla operației „$*$".

● **7.** Pe mulțimea $A = \{\pm 1, \pm i, 0\}$ se definește legea de compoziție „$\top$" astfel:
$x \top y = xy + 3ix + 3iy - 9 - 3i$, pentru orice $x, y \in A$.
Alcătuiți tabla operației „$\top$".

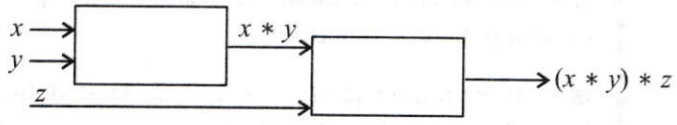
Proprietăți ale legilor de compoziție

Noțiunea de lege de compoziție, așa cum a fost introdusă în paragraful precedent, prezintă un mare grad de generalitate. În definiția unei legi de compoziție se ignoră atât natura elementelor mulțimii suport, cât și modul efectiv în care acționează operația. Singura restricție care s-a pus a fost ca la orice pereche ordonată (x, y) de elemente să se asocieze un element și numai unul. Din acest motiv, pe o mulțime suport se pot defini foarte multe legi de compoziție, în majoritatea lor neinteresante. Astfel, dacă mulțimea suport are doar 3 elemente, atunci se pot defini $3^9 = 19\,683$ legi de compoziție. Din această cauză, studiul legilor de compoziție bazat doar pe definiția lor este foarte sărac în rezultate. S-a dovedit utilă ideea de a studia legi de compoziție cu anumite proprietăți care, în multe cazuri concrete (operații cu numere, operații cu matrice etc.), s-au folosit în efectuarea calculului algebric și în stabilirea unor rezultate remarcabile, importante din punct de vedere teoretic și practic.

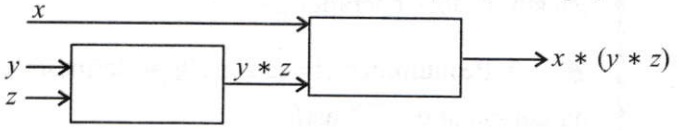
♦ *Asociativitate.*

Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „$*$". Pentru a compune trei elemente x, y și z, în această ordine, trebuie să mai precizăm (prin paranteze) ordinea în care se efectuează compunerea: $(x*y)*z$ sau $x*(y*z)$.

Prezența parantezelor în expresia $(x*y)*z$ indică următoarea succesiune de calcule: se află mai întâi compusul lui x cu y și apoi acesta se compune (la dreapta!) cu z.



Prezența parantezelor în expresia $x*(y*z)$ impune să aflăm mai întâi $y*z \in M$ și să-l compunem apoi (la stânga!) cu x.



Vom studia în continuare doar legi de compoziție cu proprietatea că $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x, y, z \in M$.

În acest sens, introducem următoarea noțiune:

Definiție. O *lege de compoziție* „$*$" se numește *asociativă* dacă: $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x, y, z \in M$.

EXEMPLE

1) Adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt legi de compoziție asociative, pentru că $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ și $(xy)z = x(yz)$.

2) Adunarea și înmulțirea matricelor pătratice cu elemente reale sunt asociative, pentru că $\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(AB)C = A(BC)$.

3) Compunerea pe mulțimea $\mathcal{F}(A)$ a funcțiilor $f: A \to A$ este asociativă, pentru că $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(A)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

4) Operația de scădere pe mulțimea $\mathbb{Z}$ nu este asociativă. Exemplu, $(3 - 7) - 1 \neq 3 - (7 - 1)$.

Identificarea unor proprietăți ale legilor de compoziție.

1) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$" prin $x * y = xy - x - y + 2, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Calculați $(x * y) * z$ și $x * (y * z)$ și deduceți că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

2) Pe $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție „$*$" prin $u * v = uv + i(u + v) - 1 - i$, $\forall\, u, v \in \mathbb{C}$.

Calculați $(u*v)*w$ și $u*(v*w)$. Arătați că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

3) Pe intervalul $M = (0, \infty)$ definim legea de compoziție „$*$" prin $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$, $\forall\, x, y \in M$, unde e este baza logaritmilor naturali. Arătați că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

4) Fie legile de compoziție asociative „$\top$" și „$\perp$" definite pe mulțimile M, respectiv N. Pe $M \times N$ definim legea de compoziție „$*$" prin $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x \top x', y \perp y')$. Arătați că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

5) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ definim operația „$*$", $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x + x', yy')$.

Arătați că „$*$" este asociativă.

6) Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definim operația „$*$" prin $A * B \overset{\text{def}}{=} AB - BA, \forall\, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că „$*$" nu este asociativă.

b) Arătați că $A * A = O_2$ și $(A*B)*C + (B*C)*A + (C*A)*B = O_2$, $\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

♦ *Comutativitate.*

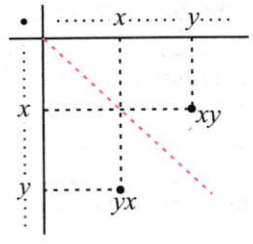
Așa cum s-a observat, proprietatea de asociativitate simplifică calculul algebric. Un plus de suplețe este oferit de operații care au proprietatea că rezultatul compunerii oricăror două elemente nu depinde de ordinea în care sunt considerate.

Definiție. O *lege de compoziție* $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$ se numește *comutativă* dacă $x * y = y * x$, $\forall x, y \in M$.

EXEMPLU

Adunarea și înmulțirea numerelor reale (sau complexe) sunt legi de compoziție comutative:
$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$; $\forall x, y \in \mathbb{C}, x + y = y + x$.
$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x$; $\forall x, y \in \mathbb{C}, x \cdot y = y \cdot x$.

Dacă o operație este comutativă, atunci tabla operației este simetrică în raport cu diagonala principală; adică elementul xy de la intersecția liniei lui x cu coloana lui y trebuie să fie egal cu elementul yx de la intersecția liniei lui y cu coloana lui x, oricare ar fi $x, y \in M$.



Numeroase legi de compoziție se introduc cu ajutorul altora deja cunoscute. Aceste operații pot prelua unele proprietăți de la cele de plecare prin „mecanismul" dat chiar de definiția lor. Astfel, comutativitatea adunării matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este o consecință a proprietății de comutativitate a adunării numerelor reale.

Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

atunci $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B + A$.

Să observăm că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este comutativă, cu toate că înmulțirea numerelor reale este comutativă. Pentru a susține această afirmație, trebuie să arătăm că avem cel puțin un (contra)exemplu.

EXEMPLU

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

și $B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$, deci $AB \neq BA$.

7) Verificați dacă operația de compunere a funcțiilor de tipul $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, este comutativă. Folosiți tabla operației.

Indicație.

Funcțiile de tipul din enunț sunt

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla operației este

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

8) Fie matricele $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Arătați că $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Arătați că operația indusă pe $M = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ de înmulțirea matricelor este comutativă.

9) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$" prin $x * y \overset{\text{def}}{=} xy + 2ax + by$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, unde a, b sunt parametrii reali.

Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă dacă și numai dacă $b = 2a$.

10) Pe mulțimea M este definită o lege de compoziție asociativă și comutativă.

Arătați că oricare ar fi $x_1, x_2, x_3 \in M$ și oricare ar fi funcția bijectivă $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ avem $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} = x_1 x_2 x_3$.

11) Fie legile de compoziție comutative „$\top$" și „$\perp$" definite pe mulțimile M, respectiv N. Pe $M \times N$ definim legea de compoziție „$*$" prin $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x \top x', y \perp y')$.

Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă.

12) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ definim legea de compoziție „$*$" prin $(x, y) * (x', y') \overset{\text{def}}{=} (xx', y + y')$.

Arătați că legea de compoziție „$*$" este comutativă.

♦ *Element neutru. Elemente simetrizabile.*

EXEMPLU

Numărul 0 are proprietatea $0 + x = x + 0 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Numărul 1 are proprietatea $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ au proprietățile:

$$O_2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{pmatrix} = A = A + O_2 \text{ și}$$

$$I_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A = AI_2,\ \forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Așadar, pentru operațiile prezentate mai sus, am reușit să precizăm câte un element în mulțimea suport a operației care are efect nul la compunere cu oricare element din mulțimea suport.

Definiție. Un element $e \in M$ se numește *element neutru* pentru legea de compoziție „$*$“, dacă $\forall x \in M\ \ e * x = x * e = x$.

Teoremă. Dacă o lege de compoziție admite element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstrație.

Fie e și e' două elemente neutre pentru o lege de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$. Avem $e * e' = e'$ pentru că e este element neutru. De asemenea, $e * e' = e$ pentru că și e' este element neutru. Rezultă că $e = e'$. ■

Dacă o operație pe M este notată aditiv și admite element neutru, acesta se numește *elementul zero* și se notează de regulă cu 0. Avem $0 + x = x + 0 = x$, $\forall\, x \in M$.

Când operația se notează multiplicativ, elementul neutru, dacă există, se notează de regulă cu 1 și se numește *elementul unitate*. Vom avea $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall\, x \in M$.

În unele situații se folosesc notații specifice pentru elementul neutru: I_n pentru înmulțirea matricelor pătratice de ordin n, 1_A pentru operația de compunere a funcțiilor $f : A \to A$ etc.

EXEMPLE

1) Fie A o mulțime nevidă. Funcția identică a lui A, $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$ este elementul neutru al operației de compunere pe mulțimea $\mathcal{F}(A) = \{ f \mid f : A \to A \}$ pentru că $1_A \circ f = f \circ 1_A = f$, $\forall f \in \mathcal{F}(A)$.

2) Matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este elementul neutru al operației de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru că $I_2 A = AI_2 = A, \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Operația indusă de înmulțirea numerelor întregi pe submulțimea $2\mathbb{Z} = \{2q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ nu admite element neutru.

13) Fie următoarele legi de compoziție:

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	p	q
p	p	q	n	m
q	q	p	m	n

$\circ$	α	β	γ	δ	ε
α	ε	α	δ	β	γ
β	α	β	γ	δ	ε
γ	δ	γ	α	ε	β
δ	β	δ	ε	γ	α
ε	γ	ε	β	α	δ

Pentru fiecare lege de compoziție specificați care este elementul neutru.

14) Precizați dacă următoarele legi de compoziție sunt bine definite pe mulțimile indicate și, în acest caz, determinați elementul neutru (dacă există):

a) $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0, 1)$;

b) $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ pe $(4, \infty)$;

c) $x * y = \dfrac{4xy + 3}{4x + 4y + 4}$ pe $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$;

d) $x * y = x^2 y$ pe $\mathbb{R}$.

Indicație.

a) Arătăm că operația este bine definită:
Fie $x, y \in (0, 1)$.

$$\frac{xy}{2xy - x - y + 1} = \frac{xy}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}.$$

Avem: $\left|2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\right| < 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

și $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} > 0$.

Ca urmare, $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1} > 0$.

În plus, $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1} < 1$ pentru că $xy - x - y + 1 > 0$.

Determinarea elementului neutru:
$\forall\, x \in (0, 1)$, avem:

$x * e = x$, $\dfrac{xe}{2xe - x - e + 1} = x$,

$2e - 1 = x(2e - 1)$. Rezultă $e = \dfrac{1}{2} \in (0, 1)$.

Analog, dacă $\forall\, x \in (0, 1)$, $e * x = x$, atunci obținem $e = \dfrac{1}{2}$.